Distributietheorie 4-12-02

Tentamenopgave[1]

I

Beschouw de differentiaaloperator $D = (\frac{d}{dx})^2 + \frac{d}{dx} - 2$.

1. Bepaal de fundamentele oplossing van D behorend tot $\mathcal{D}'_+ = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : \mathrm{dr}(T) \subset [0, +\infty)\}$.

2. Bepaal de oplossing $T \in \mathcal{D}'_+$ van de vergelijking $DT = Y$ (de Heaviside één stap functie). Aanwijzing: gebruik convolutie of de symboolrekening.

3. Bepaal, m.b.v. de symboolrekening, de oplossing f van het volgende klassieke beginwaardeprobleem, waarbij g een continue functie op $\mathbb{R}$ is:

$$Df = g, \quad f(0) = 0, \; f'(0) = 1 \tag{1}$$

4. Wat is de oplossing wanneer $g = 1$?

5. Zij G een functie van de klasse C^2 op $\mathbb{R}$. Geef voorwaarden op G zodat er een continue functie f op $\mathbb{R}$ bestaat die voldoet aan de volgende convolutievergelijking (2). Bepaal in dat geval de oplossing f.

$$\int_0^x f(x-y)(e^y - e^{-2y})dy = G(x), \quad x \geq 0 \tag{2}$$

II

1. Definieer het begrip van convergentie van distributies $T_n \to T$, $n \in \mathbb{N}$, of $T = \lim_{n\to\infty} T_n$, waar $T_n, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Toon aan dat de afbeelding $\frac{d}{dx} : T \mapsto T'$ continu is van $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ naar $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, d.w.z. $T_n \to T$ impliceert $T'_n \to T'$.

3. Geef een voorbeeld van een rij continu differentieerbare functies $(f_n)_{n\geq 1}$ zodat $T_{f_n} \to \delta$.

4. Construeer een rij continue functies $(g_n)_{n\geq 1}$ zodat $T_{g_n} \to \delta'$.

III

1. Geef de definitie van 'getemperde distributie', en van de Fouriergetransformeerde van een getemperde distributie.

2. Geef voor $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de Fouriergetransformeerden van T' en van $2\pi i x T$.

3. Toon aan dat de Fouriergetransformeerde van een even (resp. oneven) distributie even (resp. oneven) is.

4. Bepaal de Fouriergetransformeerde T van de distributie S = signum (functie gelijk aan 1 voor $x > 0$, gelijk aan -1 voor $x < 0$).

5. Geef de algemene inversieformule voor de Fouriertransformatie van getemperde distributies. Bepaal hiermee de Fouriergetransformeerde van de distributie hw$\frac{1}{x}$.

---

[1] De delen I, II en III zijn onafhankelijk. Verduidelijk je antwoorden door de gebruikte stellingen te noemen.